

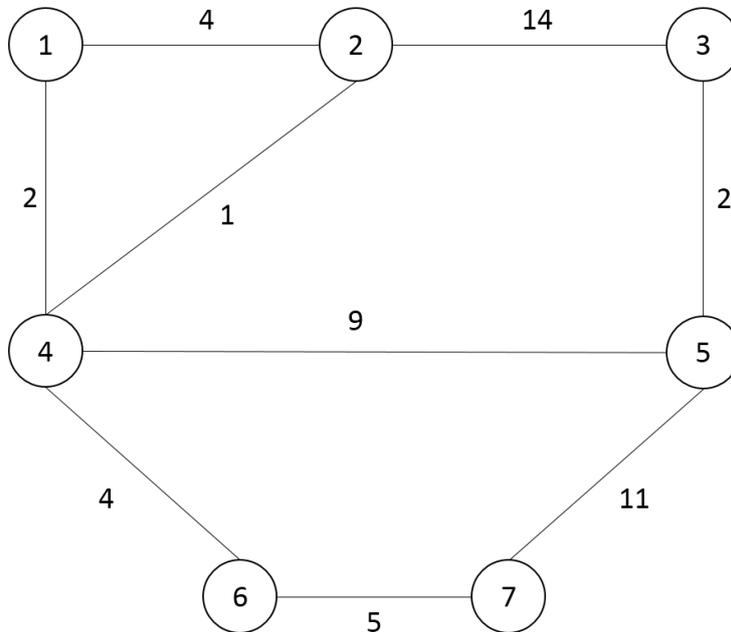
*UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BERGAMO*  
*Dipartimento di Ingegneria*

**INSTRADAMENTO: ALGORITMO  
DI KRUSKAL**

*FONDAMENTI DI RETI E TELECOMUNICAZIONE*  
*A.A. 2012/13 - II° Semestre*

## Esercizio 1

Sia dato il grafo  $G = (N, A)$  pesato e non orientato riportato in figura. Applicando l'algoritmo di Kruskal, calcolare l'albero a costo minimo che connette i nodi  $N$ . Indicare con rigore i vari passi dell'algoritmo e il costo della soluzione trovata.



## Soluzione

### Passo 0

Inizializziamo l'insieme  $L$  degli archi dell'albero di costo minimo.

$$L = \emptyset$$

Inoltre, ordiniamo gli archi del grafo in ordine crescente di costo.

- $a_{24} \rightarrow 1$
- $a_{14} \rightarrow 2$
- $a_{35} \rightarrow 2$
- $a_{12} \rightarrow 4$
- $a_{46} \rightarrow 4$
- $a_{67} \rightarrow 5$
- $a_{45} \rightarrow 9$
- $a_{57} \rightarrow 11$
- $a_{23} \rightarrow 14$

Iniziamo a creare l'albero, aggiungendo gli opportuni archi sulla base della lista appena definita e fermando l'algoritmo quando  $|L|=|N|-1$ , ovvero  $|L|=6$ .

### **Passo 1**

Selezioniamo l'arco  $a_{24}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{24}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{24}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{24}\}$ .

$|L|=1$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 2**

Selezioniamo l'arco  $a_{14}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{14}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{14}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{24}, a_{14}\}$ .

$|L|=2$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 3**

Selezioniamo l'arco  $a_{35}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{35}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{35}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{24}, a_{14}, a_{35}\}$ .

$|L|=3$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 4**

Selezioniamo l'arco  $a_{12}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{12}\})$  ha cicli (ad esempio, il cammino 1-2-4-1 è un ciclo), allora non aggiungiamo l'arco  $a_{12}$  a  $L$ .

$|L|=3$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 5**

Selezioniamo l'arco  $a_{46}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{46}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{46}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{24}, a_{14}, a_{35}, a_{46}\}$ .

$|L|=4$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 6**

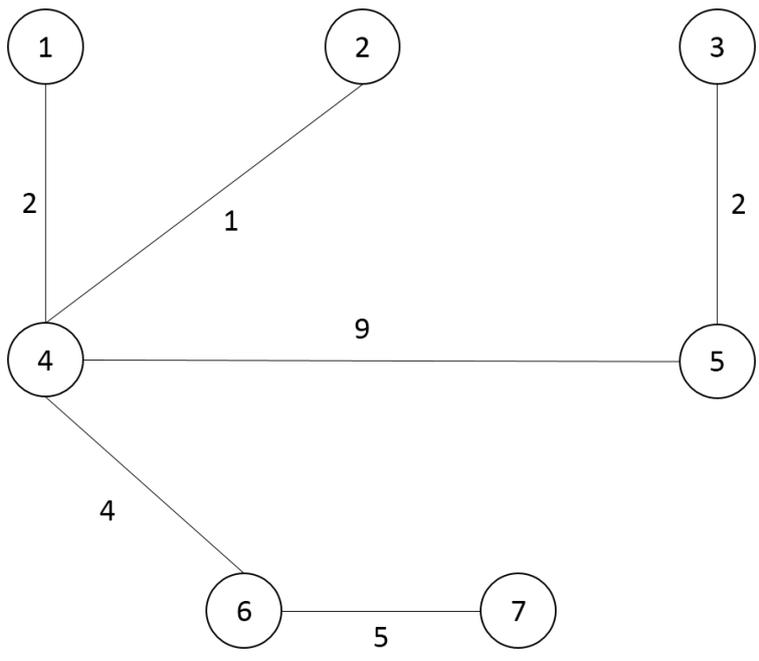
Selezioniamo l'arco  $a_{67}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{67}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{67}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{24}, a_{14}, a_{35}, a_{46}, a_{67}\}$ .

$|L|=5$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 7**

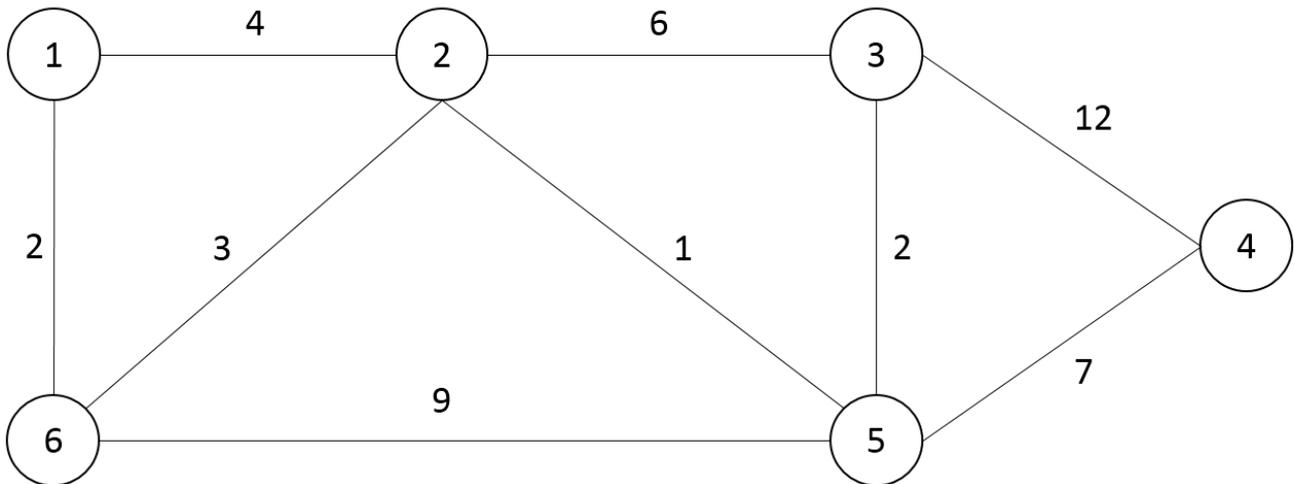
Selezioniamo l'arco  $a_{45}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{45}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{45}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{24}, a_{14}, a_{35}, a_{46}, a_{67}, a_{45}\}$ .

$|L|=6$  allora ci fermiamo. L'albero di costo minimo è  $T = (N, L)$ , rappresentato in figura e di costo 23.



## Esercizio 2

Sia dato il grafo  $G = (N, A)$  pesato e non orientato riportato in figura. Applicando l'algoritmo di Kruskal, definire l'albero di costo minimo. Indicare con rigore i vari passi dell'algoritmo.



## Soluzione

### Passo 0

Inizializziamo l'insieme  $L$  degli archi dell'albero di costo minimo.

$$L = \emptyset$$

Inoltre, ordiniamo gli archi del grafo in ordine crescente di costo.

- $a_{25} \rightarrow 1$
- $a_{16} \rightarrow 2$
- $a_{35} \rightarrow 2$
- $a_{26} \rightarrow 3$
- $a_{12} \rightarrow 4$
- $a_{23} \rightarrow 6$
- $a_{45} \rightarrow 7$
- $a_{56} \rightarrow 9$
- $a_{34} \rightarrow 12$

Iniziamo a creare l'albero, aggiungendo gli opportuni archi sulla base della lista appena definita e fermando l'algoritmo quando  $|L|=|N|-1$ , ovvero  $|L|=5$ .

### Passo 1

Selezioniamo l'arco  $a_{25}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{25}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{25}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{25}\}$ .

$|L|=1$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 2**

Selezioniamo l'arco  $a_{16}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{16}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{16}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{25}, a_{16}\}$ .

$|L|=2$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 3**

Selezioniamo l'arco  $a_{35}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{35}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{35}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{25}, a_{16}, a_{35}\}$ .

$|L|=3$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 4**

Selezioniamo l'arco  $a_{26}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{26}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{26}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{25}, a_{16}, a_{35}, a_{26}\}$ .

$|L|=4$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 4**

Selezioniamo l'arco  $a_{12}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{12}\})$  ha cicli (ad esempio, il cammino 1-2-6-1 è un ciclo), allora non aggiungiamo l'arco  $a_{12}$  a  $L$ .

$|L|=4$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 5**

Selezioniamo l'arco  $a_{23}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{23}\})$  ha cicli (ad esempio, il cammino 2-3-5-2 è un ciclo), allora non aggiungiamo l'arco  $a_{23}$  a  $L$ .

$|L|=4$  allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

### **Passo 6**

Selezioniamo l'arco  $a_{45}$ . Il grafo  $T = (N, L \cup \{a_{45}\})$  non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco  $a_{45}$  a  $L$ :  
 $L = \{a_{25}, a_{16}, a_{35}, a_{26}, a_{45}\}$ .

$|L|=5$  allora ci fermiamo. L'albero di costo minimo è  $T = (N, L)$ , rappresentato in figura.

