

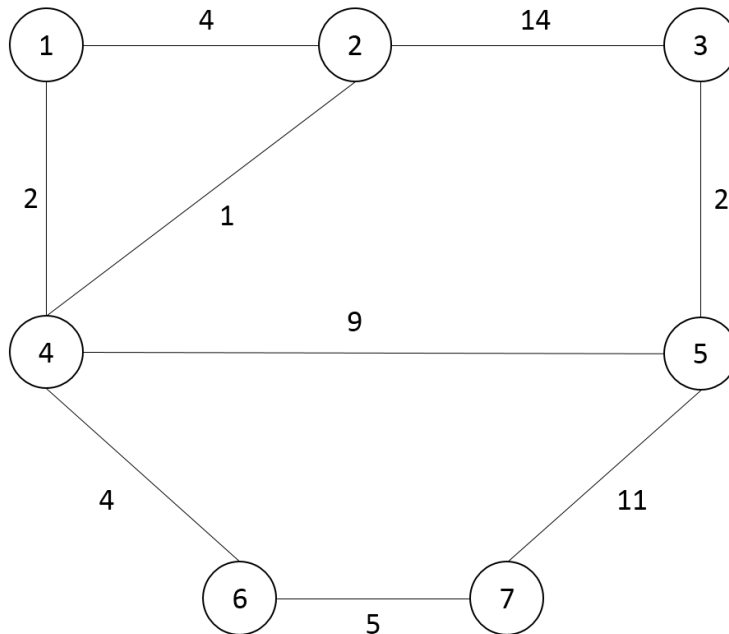
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria

**INSTRADAMENTO: ALGORITMO
DI KRUSKAL**

FONDAMENTI DI RETI E TELECOMUNICAZIONE
A.A. 2012/13 - II° Semestre

Esercizio 1

Sia dato il grafo $G = (N, A)$ pesato e non orientato riportato in figura. Applicando l'algoritmo di Kruskal, calcolare l'albero a costo minimo che connette i nodi N . Indicare con rigore i vari passi dell'algoritmo e il costo della soluzione trovata.



Soluzione

Passo 0

Inizializziamo l'insieme L degli archi dell'albero di costo minimo.

$$L = \emptyset$$

Inoltre, ordiniamo gli archi del grafo in ordine crescente di costo.

- $a_{24} \rightarrow 1$
- $a_{14} \rightarrow 2$
- $a_{35} \rightarrow 2$
- $a_{12} \rightarrow 4$
- $a_{46} \rightarrow 4$
- $a_{67} \rightarrow 5$
- $a_{45} \rightarrow 9$
- $a_{57} \rightarrow 11$
- $a_{23} \rightarrow 14$

Iniziamo a creare l'albero, aggiungendo gli opportuni archi sulla base della lista appena definita e fermando l'algoritmo quando $|L|=|N|-1$, ovvero $|L|=6$.

Passo 1

Selezioniamo l'arco a_{24} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{24}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{24} a L :
 $L = \{a_{24}\}$.

$|L|=1$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 2

Selezioniamo l'arco a_{14} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{14}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{14} a L :
 $L = \{a_{24}, a_{14}\}$.

$|L|=2$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 3

Selezioniamo l'arco a_{35} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{35}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{35} a L :
 $L = \{a_{24}, a_{14}, a_{35}\}$.

$|L|=3$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 4

Selezioniamo l'arco a_{12} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{12}\})$ ha cicli (ad esempio, il cammino 1-2-4-1 è un ciclo), allora non aggiungiamo l'arco a_{12} a L .

$|L|=3$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 5

Selezioniamo l'arco a_{46} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{46}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{46} a L :
 $L = \{a_{24}, a_{14}, a_{35}, a_{46}\}$.

$|L|=4$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 6

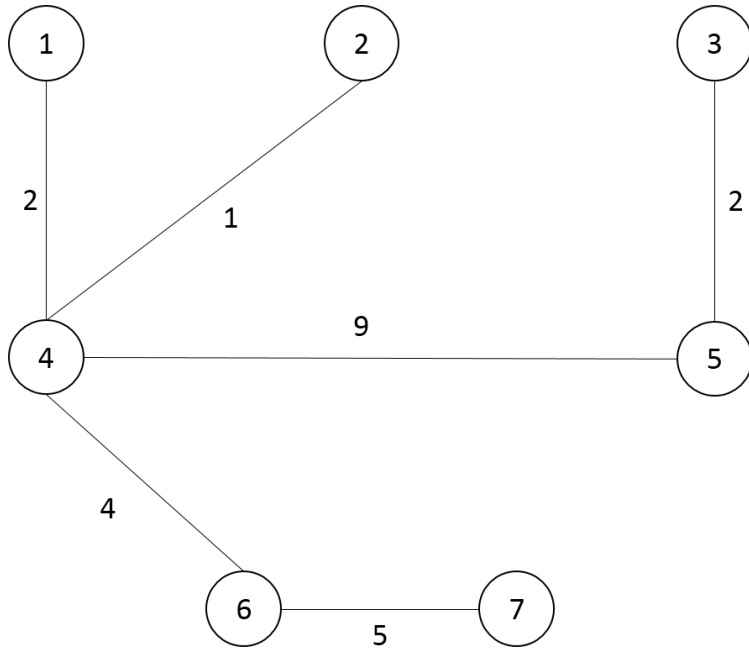
Selezioniamo l'arco a_{67} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{67}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{67} a L :
 $L = \{a_{24}, a_{14}, a_{35}, a_{46}, a_{67}\}$.

$|L|=5$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 7

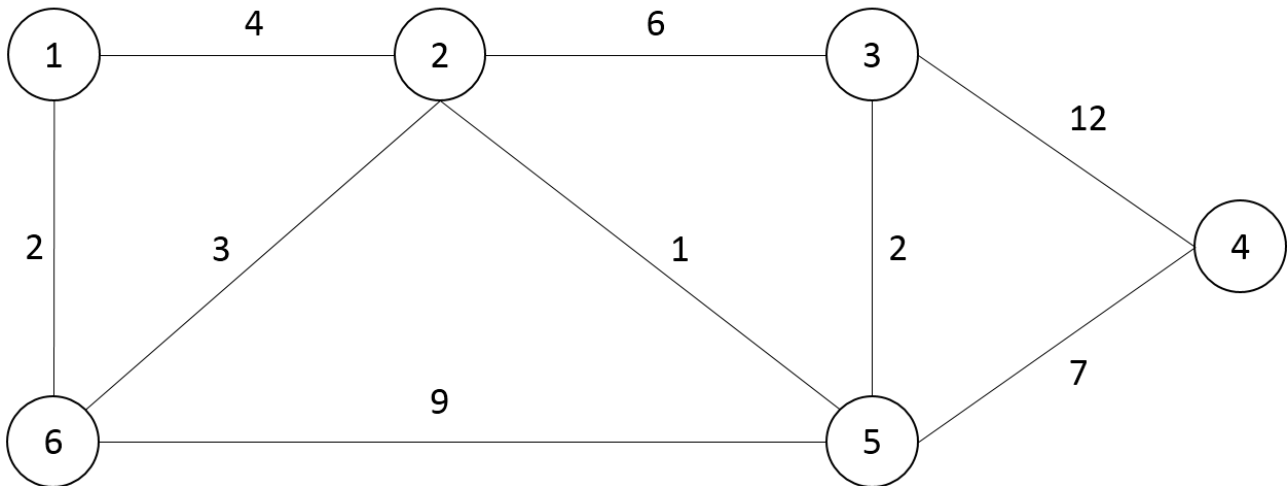
Selezioniamo l'arco a_{45} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{45}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{45} a L :
 $L = \{a_{24}, a_{14}, a_{35}, a_{46}, a_{67}, a_{45}\}$.

$|L|=6$ allora ci fermiamo. L'albero di costo minimo è $T = (N, L)$, rappresentato in figura e di costo 23.



Esercizio 2

Sia dato il grafo $G = (N, A)$ pesato e non orientato riportato in figura. Applicando l'algoritmo di Kruskal, definire l'albero di costo minimo. Indicare con rigore i vari passi dell'algoritmo.



Soluzione

Passo 0

Inizializziamo l'insieme L degli archi dell'albero di costo minimo.

$$L = \emptyset$$

Inoltre, ordiniamo gli archi del grafo in ordine crescente di costo.

- $a_{25} \rightarrow 1$
- $a_{16} \rightarrow 2$
- $a_{35} \rightarrow 2$
- $a_{26} \rightarrow 3$
- $a_{12} \rightarrow 4$
- $a_{23} \rightarrow 6$
- $a_{45} \rightarrow 7$
- $a_{56} \rightarrow 9$
- $a_{34} \rightarrow 12$

Iniziamo a creare l'albero, aggiungendo gli opportuni archi sulla base della lista appena definita e fermando l'algoritmo quando $|L|=|N|-1$, ovvero $|L|=5$.

Passo 1

Selezioniamo l'arco a_{25} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{25}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{25} a L :
 $L = \{a_{25}\}$.

$|L|=1$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 2

Selezioniamo l'arco a_{16} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{16}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{16} a L :
 $L = \{a_{25}, a_{16}\}$.

$|L|=2$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 3

Selezioniamo l'arco a_{35} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{35}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{35} a L :
 $L = \{a_{25}, a_{16}, a_{35}\}$.

$|L|=3$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 4

Selezioniamo l'arco a_{26} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{26}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{26} a L :
 $L = \{a_{25}, a_{16}, a_{35}, a_{26}\}$.

$|L|=4$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 4

Selezioniamo l'arco a_{12} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{12}\})$ ha cicli (ad esempio, il cammino 1-2-6-1 è un ciclo), allora non aggiungiamo l'arco a_{12} a L .

$|L|=4$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 5

Selezioniamo l'arco a_{23} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{23}\})$ ha cicli (ad esempio, il cammino 2-3-5-2 è un ciclo), allora non aggiungiamo l'arco a_{23} a L .

$|L|=4$ allora andiamo avanti nell'esecuzione dell'algoritmo.

Passo 6

Selezioniamo l'arco a_{45} . Il grafo $T = (N, L \cup \{a_{45}\})$ non ha cicli, allora aggiungiamo l'arco a_{45} a L :
 $L = \{a_{25}, a_{16}, a_{35}, a_{26}, a_{45}\}$.

$|L|=5$ allora ci fermiamo. L'albero di costo minimo è $T = (N, L)$, rappresentato in figura.

