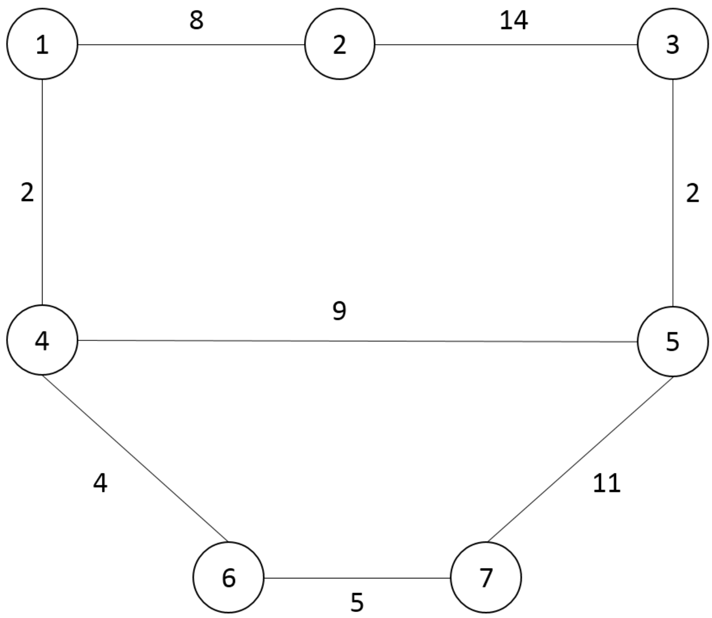
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BERGAMO
Dipartimento di Ingegneria

INSTRADAMENTO: ALGORITMO DI BELLMAN-FORD

FONDAMENTI DI RETI E TELECOMUNICAZIONE
A.A. 2012/13 - II° Semestre

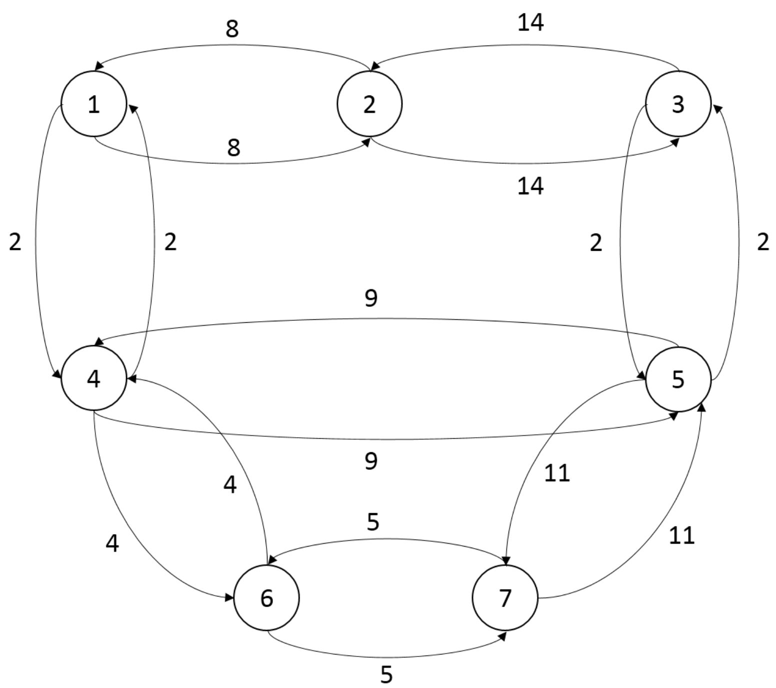
Esercizio 1

Sia dato il grafo $G= (N, A)$ pesato e non orientato riportato in figura. Applicando l'algoritmo di Bellman-Ford, calcolare i percorsi a costo minimo dal nodo 3 ad ogni nodo di N. Indicare con rigore i vari passi dell'algoritmo.



Soluzione

L'algoritmo di Bellman-Ford è definito per grafi orientati. Per questo motivo, costruiamo il grafo orientato associato a quello assegnato.



Passo 0

Inizializziamo l'insieme L degli archi dell'albero dei cammini minimi dal nodo 3 agli altri nodi di N, il costo associato ai nodi, D_i, e gli archi utilizzati per costruire i cammini minimi associati ai vari nodi h_i.

$$L = \emptyset, D_3 = 0, D_i = \infty \quad \forall\, i \in N - \{3\}, h_i = null \quad \forall\, i \in N$$

Elenchiamo gli archi per facilitare l'aggiornamento dei pesi (l'ordine è scelto a piacere):

a_{32}
a_{35}
a_{21}
a_{14}
a_{45}
a_{46}
a_{67}
a_{57}
a_{23}
a_{53}
a_{12}
a_{41}
a_{54}
a_{64}
a_{76}
a_{75}

Passiamo ad aggiornare i pesi dei nodi, D_i, per ogni arco, per un numero di volte massimo pari a $|N|$-1=6 volte.

Passo 1 (aggiornamento #1 di 6)

$a_{32}, D_2 = \min[D_2, D_3 + d_{32}] = \min[\infty, 0 + 14] = 14, h_2 = a_{32}$
$a_{35}, D_5 = 2, h_5 = a_{35}$
$a_{21}, D_1 = 22, h_1 = a_{21}$
$a_{14}, D_4 = 24, h_4 = a_{14}$
$a_{45}, D_5 = 2, \text{non aggiornato}$
$a_{46}, D_6 = 28, h_6 = a_{46}$
$a_{67}, D_7 = 33, h_7 = a_{67}$
$a_{57}, D_7 = 13, h_7 = a_{57}$
$a_{23}, D_3 = 0, \text{non aggiornato}$
$a_{53}, D_3 = 0, \text{non aggiornato}$
$a_{12}, D_2 = 14, \text{non aggiornato}$
$a_{41}, D_1 = 22, \text{non aggiornato}$
$a_{54}, D_4 = 11, h_4 = a_{54}$
$a_{64}, D_4 = 11, \text{non aggiornato}$
$a_{76}, D_6 = 18, h_6 = a_{76}$
$a_{75}, D_5 = 2, \text{non aggiornato}$

Rappresentiamo le informazioni ottenute alla fine di questo passo iterativo nella seguente tabella:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
D	22	14	0	11	2	18	13
h	a_{21}	a_{32}	/	a_{54}	a_{35}	a_{76}	a_{57}

<u>Passo 2</u> (aggiornamento #2 di 6)

$a_{32}, D_2 = 14,$ non aggiornato
$a_{35}, D_5 = 2,$ non aggiornato
$a_{21}, D_1 = 22,$ non aggiornato
$a_{14}, D_4 = 11,$ non aggiornato
$a_{45}, D_5 = 2,$ non aggiornato
$a_{46}, D_6 = 15, h_6 = a_{46}$
$a_{67}, D_7 = 13,$ non aggiornato
$a_{57}, D_7 = 13,$ non aggiornato
$a_{23}, D_3 = 0,$ non aggiornato
$a_{53}, D_3 = 0,$ non aggiornato
$a_{12}, D_2 = 14,$ non aggiornato
$a_{41}, D_1 = 13, h_1 = a_{41}$
$a_{54}, D_4 = 11,$ non aggiornato
$a_{64}, D_4 = 11,$ non aggiornato
$a_{76}, D_6 = 15,$ non aggiornato
$a_{75}, D_5 = 2,$ non aggiornato

Rappresentiamo le informazioni ottenute alla fine di questo passo iterativo nella seguente tabella:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
D	13	14	0	11	2	15	13
h	a_{41}	a_{32}	/	a_{54}	a_{35}	a_{46}	a_{57}

<u>Passo 3</u> (aggiornamento #3 di 6)

$a_{32}, D_2 = 14,$ non aggiornato
$a_{35}, D_5 = 2,$ non aggiornato
$a_{21}, D_1 = 22,$ non aggiornato
$a_{14}, D_4 = 11,$ non aggiornato
$a_{45}, D_5 = 2,$ non aggiornato
$a_{46}, D_6 = 15,$ non aggiornato
$a_{67}, D_7 = 13,$ non aggiornato
$a_{57}, D_7 = 13,$ non aggiornato
$a_{23}, D_3 = 0,$ non aggiornato
$a_{53}, D_3 = 0,$ non aggiornato
$a_{12}, D_2 = 14,$ non aggiornato
$a_{41}, D_1 = 13,,$ non aggiornato
$a_{54}, D_4 = 11,$ non aggiornato
$a_{64}, D_4 = 11,$ non aggiornato

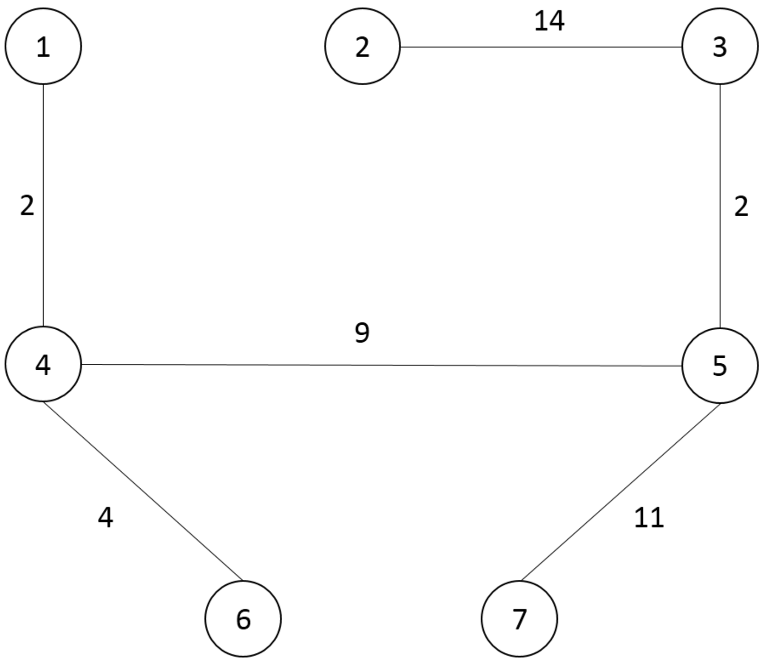
$a_{76}, D_6 = 15,$ non aggiornato
$a_{75}, D_5 = 2,$ non aggiornato

Non c'è stato nessun aggiornamento dei pesi degli archi, di conseguenza l'algoritmo di Bellman-Ford si ferma. Non è necessario riscrivere la tabella visto che coincide con quella del passo 2.

Partendo dall'ultima tabella (quella del passo 2), definiamo l'albero dei cammini minimi dal nodo 3 agli altri nodi del grafo. L'insieme degli archi dell'albero, *L*, è dato dall'insieme di archi specificato nella tabella.

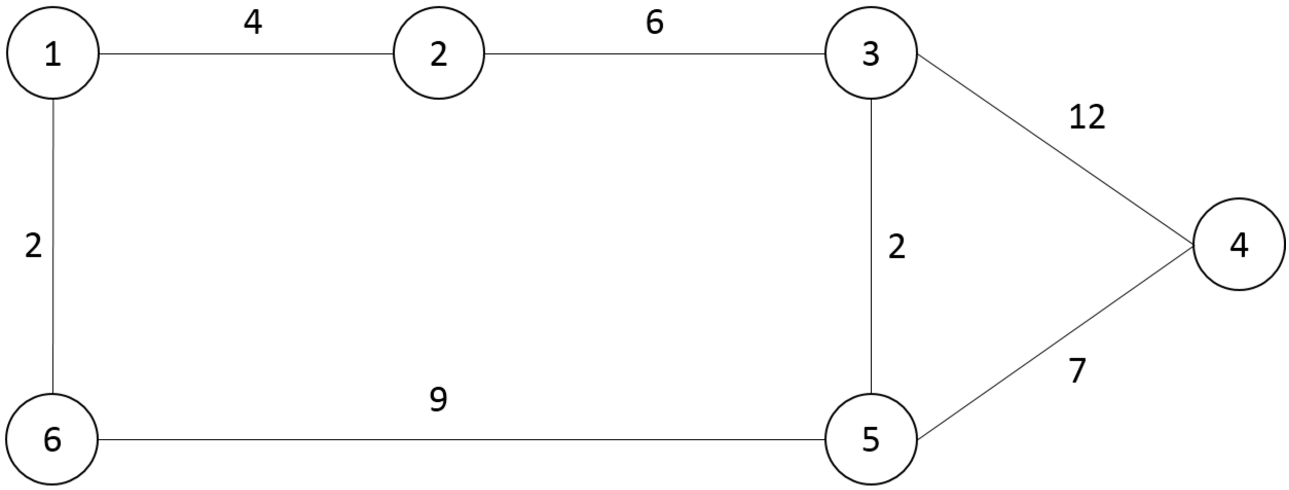
$L = \{a_{41}, a_{32}, a_{54}, a_{35}\ , a_{46}, a_{57}\ \}$

L'albero è dunque il seguente *T=(N, L)*, rappresentato anche in figura (gli archi sono rappresentati come non orientati visto che nel grafo reale di partenza non avevano orientamento; l'orientamento è stato introdotto solo per applicare Bellman-Ford).



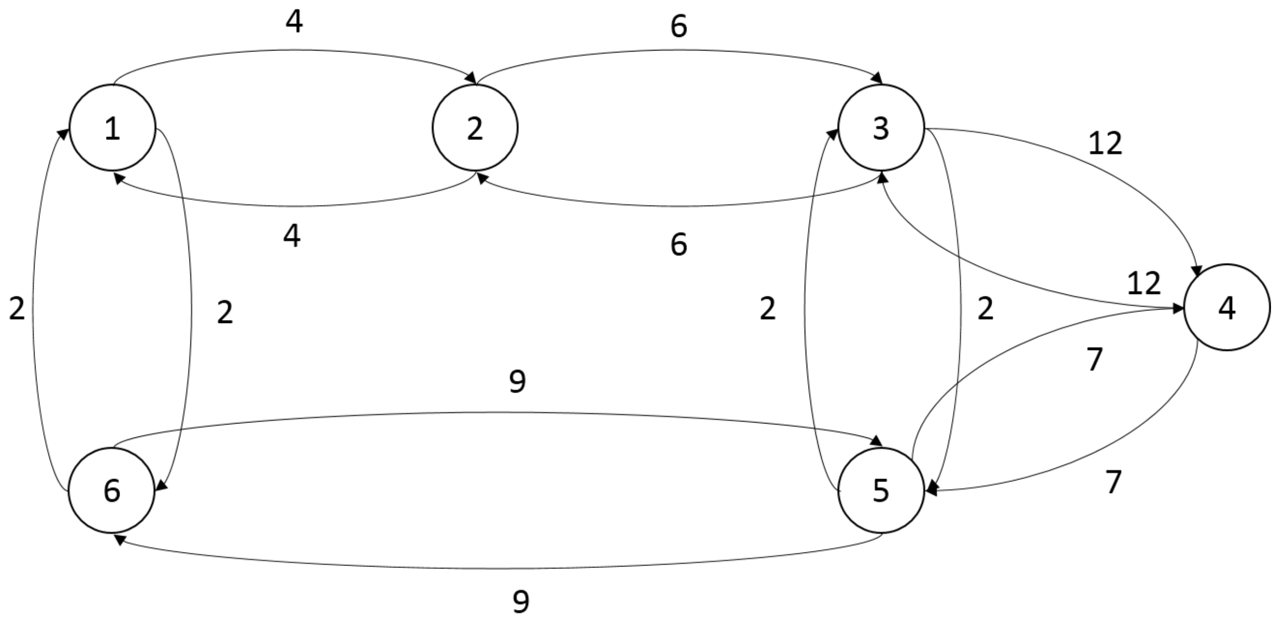
Esercizio 2

Sia dato il grafo *G= (N, A)* pesato e non orientato riportato in figura. Applicando l'algoritmo di Bellman-Ford, calcolare i percorsi a costo minimo dai nodi 3 e 6 verso il nodo 1. Indicare con rigore i vari passi dell'algoritmo.



Soluzione

L'algoritmo di Bellman-Ford è definito per grafi orientati. Per questo motivo, costruiamo il grafo orientato associato a quello assegnato.



Nel nostro caso si richiede di trovare i percorsi minimi dai nodi 3 e 6 verso il nodo 1. Dato che il grafo iniziale è non orientato, l'albero dei percorsi a costo minimo dai nodi 3 e 6 verso il nodo 1 coincide con l'albero dei percorsi a costo minimo dal nodo 1 verso i nodi 3 e 6. Per tale motivo, applichiamo Bellman-Ford come se dovessimo trovare i percorsi minimi aventi come origine il nodo 1. Inoltre, anche se in realtà dobbiamo trovare solo i percorsi minimi da 1 verso 3 e 6, applichiamo Bellman-Ford come se dovessimo trovare i percorsi minimi verso tutti i nodi *N*.

Passo 0

Inizializzo l'insieme *L* degli archi dell'albero dei cammini minimi dal nodo 1 verso i nodi 3 e 6, il costo associato ai nodi, D_i, e gli archi utilizzati per costruire i cammini minimi associati ai vari nodi h_i.

$$L = \emptyset, D_1 = 0, D_i = \infty \quad \forall\, i \in N - \{1\}, h_i = null \quad \forall\, i \in N$$

Elenchiamo gli archi per velocizzare l'aggiornamento dei pesi (l'ordine è definito a piacere):

a_{12}
a_{16}
a_{23}
a_{65}
a_{35}
a_{34}
a_{45}
a_{21}
a_{61}
a_{32}
a_{56}
a_{53}
a_{43}
a_{54}

Passiamo ad aggiornare i pesi dei nodi, D_i, per ogni arco, per un numero di volte massimo pari a $|N|$-1=5.

Passo 1 (aggiornamento #1 di 5)

$a_{12}, D_2 = \min[D_2, D_1 + d_{12}] = \min[\infty, 0 + 4] = 4, h_2 = a_{12}$
$a_{16}, D_6 = 2, h_6 = a_{16}$
$a_{23}, D_3 = 10, h_3 = a_{23}$
$a_{65}, D_5 = 11, h_5 = a_{65}$
$a_{35}, D_5 = 11, \text{non aggiornato}$
$a_{34}, D_4 = 22, h_4 = a_{34}$
$a_{45}, D_5 = 11, \text{non aggiornato}$
$a_{21}, D_1 = 0, \text{non aggiornato}$
$a_{61}, D_1 = 0, \text{non aggiornato}$
$a_{32}, D_2 = 4, \text{non aggiornato}$
$a_{56}, D_6 = 2, \text{non aggiornato}$
$a_{53}, D_3 = 10, \text{non aggiornato}$
$a_{43}, D_3 = 10, \text{non aggiornato}$
$a_{54}, D_4 = 18, h_4 = a_{54}$

Rappresentiamo le informazioni ottenute alla fine di questo passo iterativo nella seguente tabella:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
D	0	4	10	18	11	2
h	/	a_{12}	a_{23}	a_{54}	a_{65}	a_{16}

<u>Passo 2</u> (aggiornamento #2 di 5)

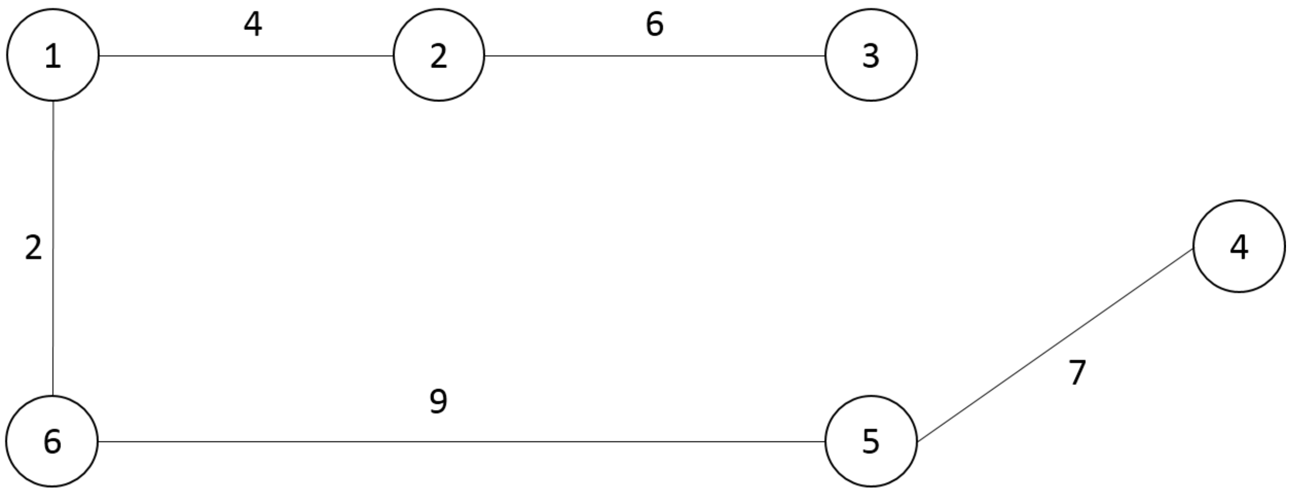
$a_{12}, D_2 = 4,$ non aggiornato
$a_{16}, D_6 = 2,$ non aggiornato
$a_{23}, D_3 = 10,$ non aggiornato
$a_{65}, D_5 = 11,$ non aggiornato
$a_{35}, D_5 = 11,$ non aggiornato
$a_{34}, D_4 = 18,$ non aggiornato
$a_{45}, D_5 = 11,$ non aggiornato
$a_{21}, D_1 = 0,$ non aggiornato
$a_{61}, D_1 = 0,$ non aggiornato
$a_{32}, D_2 = 4,$ non aggiornato
$a_{56}, D_6 = 2,$ non aggiornato
$a_{53}, D_3 = 10,$ non aggiornato
$a_{43}, D_3 = 10,$ non aggiornato
$a_{54}, D_4 = 18,$ non aggiornato

Non c'è stato nessun aggiornamento dei pesi degli archi, di conseguenza l'algoritmo di Bellman-Ford si ferma. Non è necessario riscrivere la tabella visto che coincide con quella del passo 1.

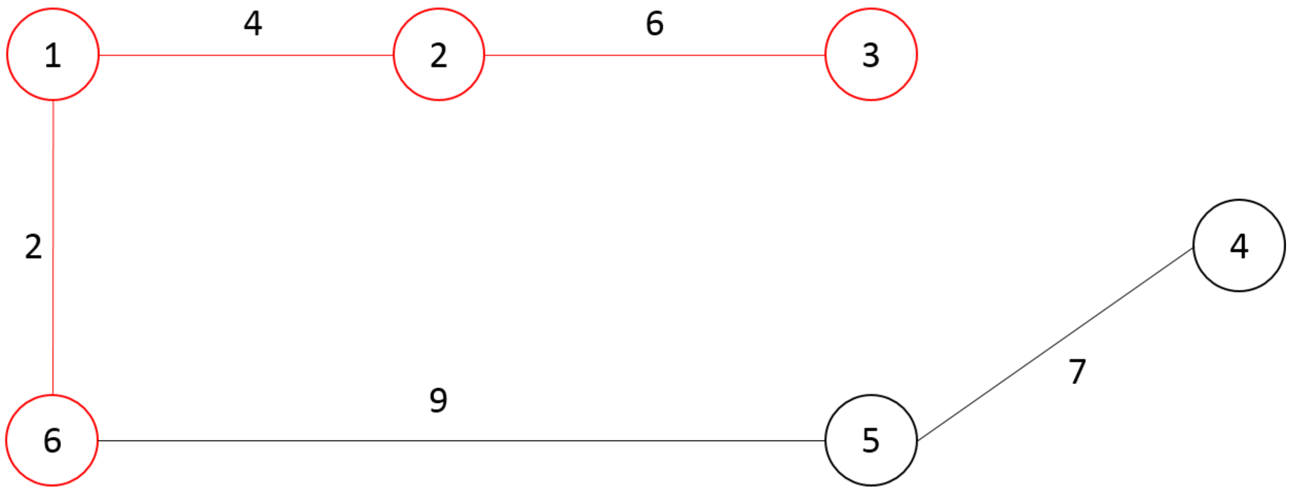
Partendo dall'ultima tabella (quella del passo 1), definiamo l'albero dei cammini minimi ottenuto. L'insieme degli archi dell'albero, L, è dato dall'insieme di archi specificato nella tabella.

$L = \{a_{12}, a_{23}, a_{54}, a_{65}\ , a_{16}\ \}$

L'albero è dunque il seguente *T=(N, L)*, rappresentato anche in figura (gli archi sono rappresentati come non orientati visto che nel grafo reale di partenza non avevano orientamento; l'orientamento è stato introdotto solo per applicare Bellman-Ford).



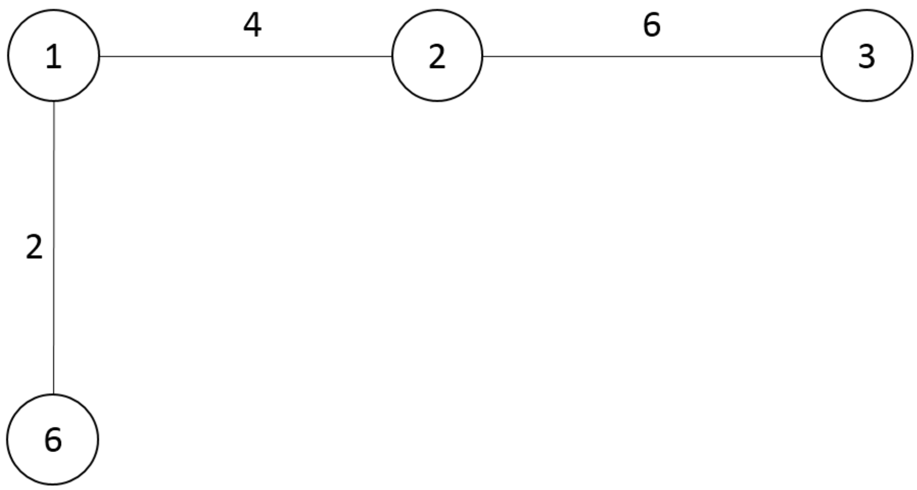
Tale albero rappresenta l’albero dei cammini minimi da 1 verso tutti gli altri nodi. A noi, però, servono solo i cammini minimi verso i nodi 3 e 6. A tal fine, partendo dall’albero trovato, evidenziamo gli archi che ci servono per raggiungere dal nodo 1 i nodi 3 e 6.



Come si vede, i nodi 5 e 4 non sono richiesti per raggiungere 3 e 6, così come gli archi a_{65}e a_{54}. Per tale motivo, l’albero dei cammini minimi da 1 ai nodi 3 e 6 è il grafo T’= (N’, L’), rappresentato in figura, dove:

$N' = \{1,2,3,6\}$

$L' = \{a_{12}, a_{23}, a_{16}\}$



Dato che il grafo è non orientato, tale albero dei cammini mini dal nodo 1 verso i nodi 3 e 6, coincide con il grafo dei cammini minimi dai nodi 3 e 6 verso il nodo 1.